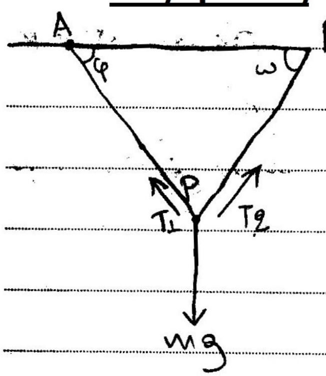
30/03/2017

ΑΣΚΗΣΗ

Ένα σώμα P με μάζα m κρέμεται υπό την επίδραση του βάρους του από δυο αβαρή νήματα AP και BP των οποίων τα άκρα A, B είναι στερεωμένα και σχηματίζουν γωνίες φ και ω αντίστοιχα με οριζόντια ευθεία AB. Να βρεθούν οι τάσεις T_1 και T_2 στα νήματα

Λύση

1ος τρόπος



$$m\ddot{r}=0 \Rightarrow T_1+T_2+B=0 \Rightarrow \begin{cases} T_{1x}-T_{2x}=0 \\ T_{1y}+T_{2y}-mg=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{1x}=T_{2x} \\ T_{1y}+T_{2y}=mg \end{cases}$$

$$\sin\omega=\frac{T_{2y}}{T_2} \Rightarrow T_{2y}=T_2\sin\omega$$

$$\cos\omega=\frac{T_{2x}}{T_2} \Rightarrow T_{2x}=T_2\cos\omega$$

$$T_1\cos\varphi=T_2\cos\omega \Rightarrow T_1=\frac{T_2\cos\omega}{\cos\varphi} \quad \text{και}$$

$$T_1\sin\varphi+T_2\sin\omega=mg$$

$$\frac{T_2\cos\omega}{\cos\varphi}\sin\varphi+T_2\sin\omega=mg \Rightarrow T_2\left(\frac{\cos\omega}{\cos\varphi}+\sin\omega\right)=mg$$

$$\Rightarrow T_2=\frac{\cos\varphi}{\cos\omega\sin\varphi+\cos\varphi\sin\omega}mg=\frac{\cos\varphi}{\sin(\omega+\varphi)}mg \Rightarrow$$

2ος τρόπος

Λύση)) Χρησιμοποιούμε τον λόγο των ημιτόνων και έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} T_1 \times T_2 &= T_1 \cdot T_2 \sin(\pi - \theta_3) \\ T_2 \times B &= T_2 \cdot B \sin(\pi - \theta_2) \\ B \times T_1 &= B \cdot T_1 \cdot \sin(\pi - \theta_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{\sin(\pi-\theta_1)} = \frac{T_2}{\sin(\pi-\theta_2)} = \frac{B}{\sin(\pi-\theta_3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_1}{\sin\theta_1} = \frac{T_2}{\sin\theta_2} = \frac{mg}{\sin\theta_3}$$

ΑΣΚΗΣΗ (συνέχεια τελευταίας άσκησης από προηγ. φορά)

(Συνέχεια) $\frac{dV}{dx} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi x}{l} = 0 \Leftrightarrow x = l\kappa,\ \kappa = 0, 1, \ldots$ ①

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -mga\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \overset{①}{=} -mga\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cos\kappa\pi =$$

$$= \begin{cases} >0, & \kappa = 1, 3, \ldots \\ <0, & \kappa = 2, 4, \ldots \end{cases}$$

ΑΡΧΗ ΤΟΥ D'ALAMBERT

Η διανυσματική εξίσωση κίνησης $m\ddot{r} = F + F_\delta \Rightarrow F_\delta = m\ddot{r} - F$

Απώλεια δύναμης: $F - m\ddot{r}$

Η δύναμη που ξοδεύεται προς εξουδετέρωση της δεσμικής δύναμης

Εφαρμόζοντας την πρόταση του D'Alambert εισάγουμε μια νέα δύναμη την $\boxed{F^* = -m\ddot{r}}$ με σκοπό $\boxed{F + F_\delta + F^* = 0}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> (Αρχή D'Alambert): Οι τρεις δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε ένα κινούμενο σωμάτιο, δηλαδή η επιβεβλημένη η δεσμική και η αντίδραση αδράνειας (F^*) βρίσκονται συνεχώς σε ισορροπία

Συνδυάζοντας την αρχή των δυνάμεων έργων και της αρχής D'Alambert ο Lagrange διατύπωσε: $F_\delta \cdot \delta r = 0$

$$\underbrace{F_\delta \cdot \delta r}_{\text{δυνατό έργο δεσμικής δύναμης}} = 0 \Rightarrow -(F + F^*)\delta r = 0 \text{ ή } (m\ddot{r} - F)\delta r = 0$$

Άρα $(m\ddot{r} - F)\delta r = 0$

<u>Πλεονεκτήματα</u>

α) Δίνει μόνο μία μαθηματική σχέση, όλες τις εξισώσεις κίνησης

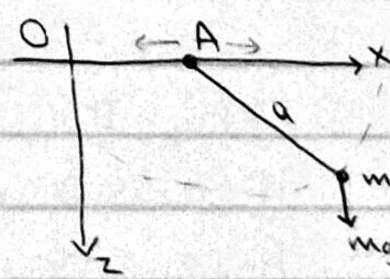
β) Δεν περιέχει δεσμικές δυνάμεις (την δεσμική δύναμη F_δ)

γ) Έχει την ίδια μορφή για ελεύθερη και ανελεύθερη κίνηση

δ) Ισχύει σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Ένα σωμάτιο m αποτελεί απλό εκκρεμές μήκους a που κρέμεται από το σημείο A και κινείται στο επίπεδο xz υπό την επίδραση του βάρους του.



Το σημείο εξάρτησης A κινείται πάνω στον άξονα Ox σύμφωνα με το δοσμένο νόμο $x_A = f(t)$

Να βρεθούν:

α) Η εξίσωση του δεσμού

β) Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης

γ) Η δεσμική δύναμη F_δ.

Λύση α) $f(x,y,z,t) \equiv (x-f(t))^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow$
↳ ολόνομος ρεόνομος δεσμός

$\Rightarrow f(x,y,z,t) \equiv (x-f(t))^2 + z^2 - a^2 = 0$ ①

Παραγωγίζοντας την ① ως προς x, z, t έχω:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-f(t))\underbrace{\dot{x}}_{1} = 2(x-f(t))$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Άρα $\overbrace{2(x-f(t))}^{\partial f/\partial x}\delta x + \overbrace{2z}^{\partial f/\partial z}\delta z = 0 \Leftrightarrow$ τα $\delta x, \delta z$ είναι διαφορικά

$(x-f(t))\delta x + z\delta z = 0$

β) Η επιβεβλημένη δύναμη έχει συνιστώσες

$F_x = 0$, $F_z = mg$

Άρα η εξίσωση D'Alambert γράφεται:

$m\ddot{x}\delta x + (m\ddot{z} - mg)\delta z = 0$

Εφαρμόζω τη μέθοδο πολλαπλασιαστών Lagrange 1ου είδους (Βάζω λ στην εξίσωση, παραγωγίζω 2 φορές και λύνω ως προς λ και βγαίνουν)

γ) Βγαίνει εύκολα

ΑΣΚΗΣΗ (Η1ω)

Ένα σωμάτιο είναι υποχρεωμένο να κινείται επάνω σε σφαίρα της οποίας η ακτίνα αυξάνει με τον χρόνο, $a = a_0 + ct$ υπό την επίδραση δύναμης F. Να βρεθεί η αντίδραση.

Ειδική περίπτωση $F = -mgz_0$